



**Devoir Libre 2**  
**A Rendre le 15/07/2020**

**PROBLÈME 1**

Soit  $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n^x}$ ,  $n \geq 1$ ,  $x \in [0, +\infty[$

1. - Montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  converge simplement dans  $[0, +\infty[$ .

2. - posons  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^x}$  pour tout  $x \in [0, +\infty[$ .

a) - Etudier la convergence uniforme de  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  dans  $[\pi; +\infty[$ .

b) - Soit  $a \in ]0; \pi[$ , Montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  converge uniformément dans  $[a, \pi]$ .

3. Montrer que  $f$  est continue dans  $]0, +\infty[$ .

4. a) - Montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nx}{n^{x-1}}$  converge uniformément dans  $[b, +\infty[$  pour tout  $b > 1$ .

b) - Montrer que  $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n$  converge uniformément dans  $[b, +\infty[$  pour tout  $b > 1$ .

c) En déduire que  $f$  est dérivable dans  $]1, +\infty[$ .

**Bon Courage**